

Tid: 4 timmar och 30 minuter.

Under de första 30 minuterna kan frågor ställas till juryn.

Endast skriv- och ritverktyg är tillåtna.

Problem 1. Låt n vara ett positivt heltal. Antag att n tal har valts ur tabellen

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

så att inga av dem kommer från samma rad eller kolumn. Bestäm det maximala värdet på de n talens produkt.

Problem 2. Låt k och n vara positiva heltal och låt $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ vara olika heltal. Ett polynom P med heltalskoefficienter uppfyller

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

och

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Bestäm det maximala värdet av kn .

Problem 3. Låt $\mathbb{R}$ beteckna de reella talen. Hitta alla funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem 4. Visa att följande olikhet gäller för alla positiva reella tal x, y, z :

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Problem 5. Talen 0 och 2013 har skrivits i två motsatta hörn av en kub. Reella tal skrivs i de kvarvarande 6 hörnen. På varje kant av kuben skrivs skillnaden mellan talen på dess ändpunkter.

När är summan av kvadraterna av talen på kanterna minimal?

Problem 6. Jultomten har minst n julklappar för n barn. För $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, gäller att barn nummer i finner $x_i > 0$ av dessa klappar åtråvärda. Antag att

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Visa att jultomten kan ge varje barn en present som det vill ha.

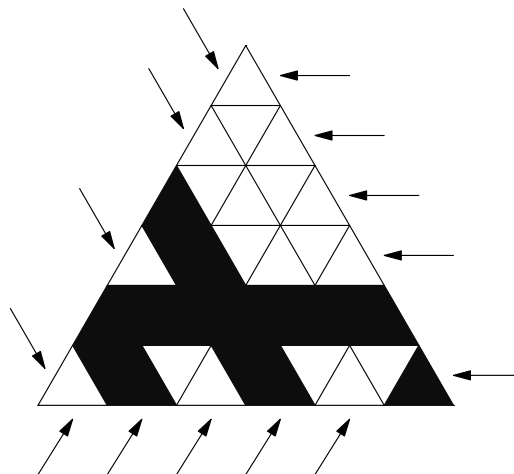
Problem 7. Ett positivt heltal står uppskrivet på en svart tavla. Spelare A och B spelar följande spel: i varje drag väljer en spelare en delare m av talet n som står på tavlan så att $1 < m < n$ och ersätter n med $n - m$. Spelare A gör första draget, och sedan turas de om. Den förste som inte kan göra ett drag förlorar. För vilka begynnelseetal finns det en vinnande strategi för spelare B ?

Problem 8. Det finns n rum i en bastu, och varje rum rymmer ett obegränsat antal människor. Män och kvinnor kan inte dela rum. Män vill enbart dela rum med män de inte känner och kvinnor vill bara dela rum med kvinnor de känner. Hitta det största talet k , så att k par alltid kan besöka bastun samtidigt, om man vet att två män känner varandra om och endast om deras hustrur känner varandra.

Problem 9. I ett land finns 2014 flygplatser, varav ingen trippel ligger på linje. Två flygplatser är förbundna med direktflyg om och endast om linjen som passerar genom dem delar landet i två delar så att varje del innehåller exakt 1006 flygplatser. Visa att det inte finns två flygplatser så att man kan färdas från den första till den andra och besöka var och en av de 2014 flygplatserna exakt en gång.

Problem 10. En vit liksidig triangel är uppdelad i n^2 lika stora mindre trianglar med linjer som är parallella med triangelns sidor. Med en *linje av trianglar* menas en rad av trianglar mellan två intilliggande parallella linjer. Speciellt räknas en ensam triangel i ett hörn också som en linje av trianglar.

Vår uppgift är att färglägga alla trianglar svarta med en följd av operationer av följande slag: välj en linje av trianglar som innehåller minst en vit triangel och måla hela denna linje svart (en möjlig situation med $n = 6$ efter fyra operationer visas i Figur 1; pilarna visar möjliga nästa drag i denna situation). Hitta det minsta och största antalet operationer som kan användas för detta.



Figur 1

Problem 11. I en spetsvinklig triangel ABC med $AC > AB$, låt D vara projektionen av A på BC ,

och låt E och F vara projektionerna av D på AB och AC . Låt G vara skärningspunkten mellan linjerna AD och EF . Låt H vara den andra skärningspunkten mellan linjen AD och den omskrivna cirkeln till triangeln ABC . Visa att

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

Problem 12. Ett trapets $ABCD$, med parallella sidor AB och CD , är sådant att omskrivna cirkeln till triangeln BCD skär linjen AD i punkten E , skild från både A och D . Visa att omskrivna cirkeln till triangeln ABE tangerar linjen BC .

Problem 13. Alla sidoytor av en tetraeder är rätvinkliga trianglar. Det är känt att tre av dess kanter har samma längd s . Finn tetraederns volym.

Problem 14. Cirkklarna α och β har samma radie och skär varandra i två punkter, varav den ena är P . Beteckna med A och B punkterna som ligger diametralt motsatt P på cirkklarna α respektive β . En tredje cirkel med samma radie passerar genom P och skär α och β i punkterna X respektive Y . Visa att linjen XY är parallell med linjen AB .

Problem 15. Fyra cirklar i planet har samma centrum. Deras radier bildar en strikt växande aritmetisk talföljd. Visa att det inte finns någon kvadrat vars alla hörn ligger på olika cirklar.

Problem 16. Vi kallar ett positivt heltal n *läckert* om det existerar ett heltal k , där $1 < k < n$, sådant att

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \dots + n.$$

Finns det ett läckert tal N som uppfyller olikheterna

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

Problem 17. Låt c och $n > c$ vara positiva heltal. Marys lärare skriver n positiva heltal på svarta tavlan. Är det sant att Mary alltid, för alla n och c , kan beteckna talen på tavlan med $a_1, \dots, a_n$ i en sådan ordning att produkten $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ är kongruent med 0 eller c modulo n ?

Problem 18. Sök alla par (x, y) av heltal sådana att $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Problem 19. Låt a_0 vara ett positivt heltal och definiera $a_n = 5a_{n-1} + 4$, för alla $n \geq 1$. Kan a_0 väljas så att a_{54} blir en multipel av 2013?

Problem 20. Finn alla polynom f med icke-negativa heltalskoefficienter sådana att det, för alla primtal p och alla positiva heltal n , finns ett primtal q och ett positivt heltal m så att $f(p^n) = q^m$.