

Длительность олимпиады: 4 часа 30 минут.

Вопросы принимаются в течение первых 30 минут.

Разрешается пользоваться лишь письменными принадлежностями.

1. Дано натуральное число n . В таблице

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

отмечают n чисел, никакие два из которых не находятся в одной строке или в одном столбце. Найдите максимально возможное произведение этих чисел.

2. Пусть k, n — натуральные числа, а $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$ — различные целые числа. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54, \\ P(y_1) &= P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013. \end{aligned}$$

Найдите наибольшее возможное значение произведения kn .

3. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Докажите, что для любых положительных вещественных x, y, z

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

5. В двух противоположных вершинах куба стоят числа 0 и 2013, а в остальных шести вершинах — некоторые вещественные числа. На каждом ребре написали разность чисел в его концах. Для какой расстановки чисел в вершинах достигается наименьшее возможное значение суммы квадратов чисел на всех ребрах.

6. Дед Мороз принес n детям подарки (не менее n штук). Для каждого $i = 1, \dots, n$ i -му ребенку нравится $x_i > 0$ из этих подарков. Известно, что

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

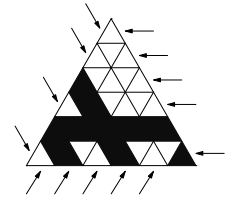
Докажите, что Дед Мороз может дать каждому ребенку по одному подарку, который нравится этому ребенку.

7. Игроки A и B играют в следующую игру. Изначально на доске написано натуральное число. За один ход число n на доске можно заменить на разность $n - t$, где t — любой делитель n , отличный от 1 и n . Игроки ходят по очереди, начинает игрок A . Проигрывает не имеющий хода. Для каких значений исходного числа игрок B имеет выигрышную стратегию?

8. В сауне n комнат. Лица разного пола не могут находиться в одной комнате. Более того, мужчины могут находиться в одной комнате, лишь если они незнакомы; а женщины, наоборот, могут находиться в одной комнате, лишь если знакомы. В сауну пришли k супружеских пар. Известно, что мужчины знакомы в том и только в том случае, когда знакомы их жены. При каком наибольшем k любые k таких пар заведомо можно разместить по комнатам?

9. В стране 2014 аэропортов, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Два аэропорта соединены прямым рейсом тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через них, делит страну на две части, в каждой из которых находится по 1006 аэропортов. Докажите, что нельзя найти два таких аэропорта, что из одного из них можно добраться до другого, побывав в каждом из 2014 аэропортов по одному разу.

10. Белый правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 равных правильных треугольничков. Набор из всех треугольничков, расположенных между двумя соседними параллельными прямыми этой решетки, называется *полосой*. Угловой треугольничек, в частности, считается полосой. За одну операцию разрешается закрасить в черный цвет полосу, в которой есть хотя бы один белый треугольничек. (На рисунке для $n = 6$ показан результат после некоторых четырех операций; стрелками обозначены возможности для следующей операции.) За какое наименьшее и за какое наибольшее количество операций можно закрасить все треугольнички в черный цвет?



11. В остроугольном треугольнике ABC $AC > AB$. Точка D — проекция A на сторону BC , точки E и F — проекции D на AB и AC . Прямая AD пересекает прямую EF в точке G и вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке H . Докажите, что $AG \cdot AH = AD^2$.

12. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD описанная окружность треугольника BCD пересекает прямую AD в точке E (отличной от A и D). Докажите, что описанная окружность треугольника ABE касается прямой BC .

13. Все четыре грани данного тетраэдра являются прямоугольными треугольниками. Три из его ребер имеют одинаковую длину s . Найдите объем тетраэдра.

14. Две окружности α и β имеют одинаковые радиусы; P — одна из двух точек их пересечения. Точки A и B диаметрально противоположны точке P на окружностях α и β . Третья окружность такого же радиуса, проходящая через P , пересекает α и β в точках X и Y . Докажите, что прямые XY и AB параллельны.

15. На плоскости даны четыре окружности с общим центром. Их радиусы образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что не существует такого квадрата, что каждая окружность содержит одну его вершину.

16. Назовем натуральное число n *восхитительным*, если существует натуральное k , $1 < k < n$, для которого

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \dots + n.$$

Существует ли такое восхитительное число N , что $2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4$?

17. Пусть s и n — натуральные числа, $n > s$. Учитель пишет на доске n натуральных чисел. Верно ли, что при любых n и s эти числа можно в некотором порядке обозначить через $a_1, \dots, a_n$ так, чтобы циклическое произведение $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n)(a_n - a_1)$ было сравнимо с 0 или с числом s по модулю n ?

18. Найдите все пары (x, y) целых чисел, для которых $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

19. Пусть a_0 — натуральное число и $a_n = 5a_{n-1} + 4$ при всех $n \geq 1$. Существует ли a_0 , для которого a_{54} кратно 2013?

20. Найдите все такие многочлены $f(x)$ с неотрицательными целыми коэффициентами, что для любого простого p и любого натурального n существует простое q и натуральное m , для которых $f(p^n) = q^m$.