

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut.

Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.

Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Z tabeli

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

należy wybrać n liczb w taki sposób, aby żadne dwie nie leżały w tej samej kolumnie ani w tym samym wierszu. Znajdź największą możliwą wartość iloczynu tych n liczb.

Zadanie 2. Liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ są parami różne, przy czym $k, n \geq 1$. Wielomian P o współczynnikach całkowitych spełnia

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

oraz

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Wyznacz największą możliwą wartość iloczynu kn .

Zadanie 3. Przez $\mathbb{R}$ oznaczmy zbiór liczb rzeczywistych. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Zadanie 5. Dwóm przeciwległym wierzchołkom sześcianu przypisano liczby 0 i 2013, a pozostałym sześciu pewne liczby rzeczywiste. Następnie każdej krawędzi tego sześcianu przypisano różnicę liczb przypisanych jej końcom. Dla jakiego wyboru sześciu liczb suma kwadratów liczb przypisanych krawędziom sześcianu jest najmniejsza?

Zadanie 6. Święty Mikołaj przyniósł grupie n dzieci co najmniej n prezentów.

Dla $i = 1, 2, \dots, n$, jest wśród nich dokładnie $x_i > 0$ prezentów, które i -te dziecko chciał aby dostać. Spełniony jest warunek

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Udowodnij, że Święty Mikołaj jest w stanie dać każdemu dziecku prezent, który je uszczęśliwi.

Zadanie 7. Na tablicy napisano dodatnią liczbę całkowitą. Gracze A i B grają w następującą grę: w swoim ruchu gracz zastępuje liczbę n napisaną na tablicy liczbą $n - m$, gdzie m jest wybranym przez niego dzielnikiem n spełniającym $1 < m < n$. Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczyna gracz A . Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. W zależności od liczby początkowo napisanej na tablicy rozstrzygnij, czy gracz B ma strategię wygrywającą.

Zadanie 8. W saunie jest n pomieszczeń, z których każde może pomieścić dowolną liczbę osób. Mężczyzna i kobieta nie mogą jednocześnie korzystać z tego samego pomieszczenia. Ponadto mężczyźni nie chcą dzielić pomieszczenia ze swoimi znajomymi, a kobiety nie chcą dzielić pomieszczenia z osobami, których nie znają. Znajdź największą liczbę k taką, że dowolne k małżeństw może jednocześnie korzystać z sauny, przy czym dwaj mężczyźni się znają wtedy i tylko wtedy, gdy ich żony się znają.

Zadanie 9. W pewnym kraju jest 2014 lotnisk, przy czym żadne trzy nie leżą w jednej linii. Między dwoma lotniskami jest bezpośredni lot wtedy i tylko wtedy, gdy linia przechodząca przez te lotniska dzieli kraj na dwie części tak, że w każdej z nich jest po 1006 lotnisk. Wykaż, że dla dowolnych dwóch lotnisk nie da się rozpocząć podróży w jednym z nich i zakończyć w drugim tak, aby każde z 2014 lotnisk odwiedzić dokładnie raz.

Zadanie 10. Pomalowany na biało trójkąt równoboczny podzielono liniami równoległymi do boków tego trójkąta na n^2 przystających trójkątów. *Linia trójkątów* nazwiemy figurę złożoną ze wszystkich trójkątów położonych między pewnymi sąsiednimi równoległymi liniami podziału. Trójkąt narożny także uznajemy za linię trójkątów.

Naszym zadaniem jest pomalowanie trójkąta na czarno za pomocą sekwencji następujących operacji: wybieramy linię trójkątów, która zawiera co najmniej jeden biały trójkąt, a następnie malujemy ją na czarno (Rysunek 1 przedstawia możliwą sytuację po czterech operacjach dla $n = 6$; strzałki wskazują możliwe operacje). Znajdź najmniejszą i największą możliwą liczbę operacji.

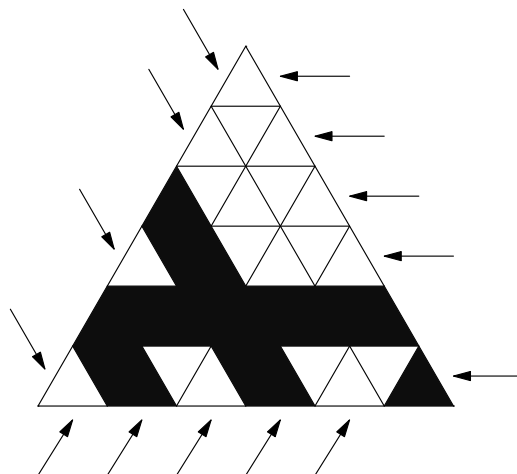


Figure 1

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AC > AB$. Niech punkt D będzie rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC , a punkty E i F rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Niech G będzie punktem przecięcia prostych AD i EF , a H drugim punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Udowodnij, że

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

Zadanie 12. Dany jest taki trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , że okrąg opisany na trójkącie BCD przecina prostą AD w punkcie E różnym od A i D . Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABE jest styczny do prostej BC .

Zadanie 13. Dany jest czworościan, którego ściany są trójkątami prostokątnymi. Ponadto wiadomo, że trzy krawędzie tego czworościanu mają tę samą długość s . Oblicz objętość czworościanu.

Zadanie 14. Okręgi α i β mają równe promienie i przecinają się w dwóch punktach. Oznaczmy jeden z tych punktów przez P . Odcinki AP i BP są średnicami okręgów odpowiednio α i β . Trzeci okrąg o tym samym promieniu przechodzi przez punkt P i przecina drugi raz okręgi α i β odpowiednio w punktach X i Y . Wykaż, że proste XY i AB są równoległe.

Zadanie 15. Na płaszczyźnie dane są cztery okręgi o wspólnym środku. Promienie tych okręgów tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Udowodnij, że nie istnieje kwadrat, którego każdy wierzchołek leży na innym spośród tych okręgów.

Zadanie 16. Dodatnią liczbę całkowitą nazywamy *smakowitą* jeśli istnieje taka liczba całkowita k , $1 < k < n$, że

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \dots + n.$$

Rozstrzygnij, czy istnieje smakowita liczba N spełniająca nierówność

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4.$$

Zadanie 17. Niech c i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym $c < n$. Nauczyciel Marysi napisał na tablicy n dodatnich liczb całkowitych. Rozstrzygnij, czy dla każdych n i c Marysia może ustawić wypisane liczby w ciągu $a_1, \dots, a_n$ tak, aby iloczyn $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ był podzielny przez n lub dawał resztę c przy dzieleniu przez n .

Zadanie 18. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) takie, że $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Zadanie 19. Niech a_0 będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz $a_n = 5a_{n-1} + 4$ dla wszystkich $n \geq 1$. Czy można tak wybrać a_0 , żeby liczba a_{54} była wielokrotnością 2013?

Zadanie 20. Znajdź wszystkie takie wielomiany f o nieujemnych całkowitych współczynnikach, że dla każdej liczby pierwszej p i dodatniej liczby całkowitej n istnieją liczba pierwsza q i dodatnia liczba całkowita m spełniające równość $f(p^n) = q^m$.