

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Kun skrive- og tegneredskaper tillatt.

Oppgave 1. La n være et positivt heltall. Anta at n tall skal velges ut fra tabellen

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

slik at ingen to av dem er fra samme rad eller søyle. Finn den maksimale verdien til produktet av disse n tallene.

Oppgave 2. La k og n være positive heltall, og la $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ være forskjellige heltall. Et polynom P med heltallskoeffisienter er slik at

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

og

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Finn største mulige verdi av kn .

Oppgave 3. La $\mathbb{R}$ betegne mengden av reelle tall. Finn alle funksjoner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 4. Vis at følgende ulikhet holder for alle positive reelle tall x, y, z :

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Oppgave 5. Tallene 0 og 2013 er skrevet på motsatte hjørner av en kube. Reelle tall skal skrives på kubens resterende seks hjørner. På hver kant skrives så differensen mellom tallene på endepunktene.

Når er summen av kvadratene av tallene skrevet på kantene minimal?

Oppgave 6. Jule-Nils har minst n gaver til n barn. For hver $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, liker det i -te barnet $x_i > 0$ av disse gavene. Anta at

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Vis at Jule-Nils kan gi hvert barn en gave det liker.

Oppgave 7. Et positivt heltall skrives på en tavle. Spillerne A og B spiller følgende spill: i hvert trekk må man velge en divisor m av tallet n skrevet på tavlen slik at $1 < m < n$ og erstatte n med $n - m$. Spiller A gjør første trekk, og spillerne alternerer trekk. Spilleren som ikke kan gjøre et trekk taper. For hvilke starttall har spiller B en vinnende strategi?

Oppgave 8. Det finnes n rom i en badstu som alle har ubegrenset kapasitet. Intet rom kan besøkes av en kvinne og en mann samtidig. Videre ønsker menn å dele rom kun med menn de ikke kjenner, og kvinner ønsker å dele rom kun med kvinner de kjenner. Finn det største tallet k slik at k ektepar kan besøke badstuen samtidig, gitt at to menn kjenner hverandre hvis og bare hvis deres koner kjenner hverandre.

Oppgave 9. I et land er det 2014 flyplasser, og ingen tre ligger på linje. To flyplasser er forbundet av en direkte rute hvis og bare hvis linjen gjennom dem deler landet i to deler som begge inneholder 1006 flyplasser. Vis at det ikke finnes to flyplasser slik at man kan reise fra den første til den andre ved å besøke hver av de 2014 flyplassene nøyaktig én gang.

Oppgave 10. En hvit likesidet trekant deles inn i n^2 like store små trekantar av ved hjelp av linjer som er parallelle med den store trekantens sider. En *rad av trekantar* betegner én av trekantene i hjørnene, eller alle trekantar som ligger mellom to nabolinjer som danner rutenettet i den store trekanten.

Vi skal male alle trekantene sorte ved å gjenta følgende type trekk: velg en rad av trekantar som inneholder minst én hvit trekant og mal denne raden av trekantar sort. En mulig situasjon med $n = 6$ etter fire trekk er vist i figur 1 nedenfor; piler viser mulige valg av rader i neste trekk.

Finn det minste og det største mulige antallet trekk.

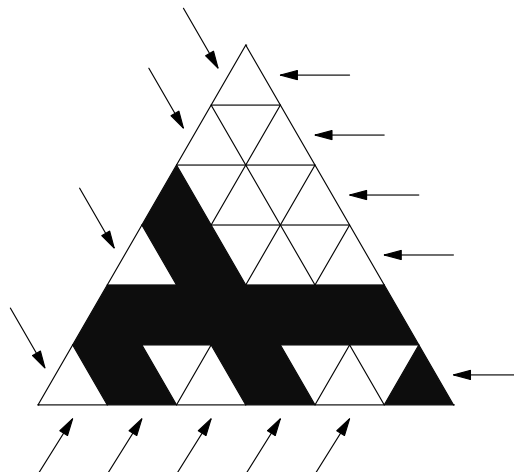


Figure 1

Oppgave 11. I en spissvinklet trekant ABC der $AC > AB$ er D fotpunktet for normalen fra A på BC , og E og F fotpunktene for normalene fra D på henholdsvis AB og AC . La G være skjæringspunktet mellom linjene AD og EF , og H være det andre skjæringspunktet mellom linjen AD og omsirkelen til trekanten ABC . Vis at

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

Oppgave 12. Et trapes $ABCD$ med parallelle sider AB og CD er slik at omsirkelen til trekanten BCD skjærer linjen AD i et punkt E forskjellig fra A og D . Vis at omsirkelen til trekanten ABE tangerer linjen BC .

Oppgave 13. Alle sideflater i et tetraeder er rettvinklede trekanter. Vi får oppgitt at tre av sidekantene har lik lengde s . Finn volumet av tetraederet.

Oppgave 14. Sirkler α og β med like radier skjærer hverandre i to punkter, hvorav det ene kalles P . La A og B betegne punktene diametralt motsatt P på henholdsvis α og β . En tredje sirkel med samme radius går gjennom P og skjærer α og β i henholdsvis X og Y . Vis at linjen XY er parallell med linjen AB .

Oppgave 15. Fire sirkler i planet har felles senter, og radiene deres danner en strengt økende aritmetisk følge. Vis at det ikke finnes noe kvadrat med ett hjørne på hver av sirklene.

Oppgave 16. Vi sier at et positivt heltall n er *nydelig* dersom det finnes et heltall k med $1 < k < n$, slik at

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \dots + n.$$

Finnes det et nydelig tall N som tilfredsstiller

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

Oppgave 17. La c og $n > c$ være positive heltall. Maries lærer skriver n positive heltall på en tavle. Er det sant at Marie for alle n og c kan kalle tallene på tavlen $a_1, \dots, a_n$ i en eller annen rekkefølge slik at det sykliske produktet $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ blir kongruent med enten 0 eller c modulo n ?

Oppgave 18. Finn alle par (x, y) av heltall slik at $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Oppgave 19. La a_0 være et positivt heltall og $a_n := 5a_{n-1} + 4$ for alle $n \geq 1$. Kan a_0 velges slik at a_{54} er et multiplum av 2013?

Oppgave 20. Finn alle polynomer f med ikke-negative heltallskoeffisienter slik at det for alle primtall p og positive heltall n finnes et primtall q og et positivt heltall m slik at $f(p^n) = q^m$.