

Laikas: 4 val. 30 min.

Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.

Leidžiamos tik rašymo ir braižybos priemonės.

1 užduotis. Duotas natūralusis skaičius n . Lentelėje

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

apibraukta n skaičių. Jokie du iš jų nėra vienoje eilutėje ar stulpelyje. Nustatykite didžiausią galimą šių n skaičių sandaugos reikšmę.

2 užduotis. Duoti natūralieji skaičiai k ir n bei skirtingi sveikieji skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$. Daugianaris P su sveikaisiais koeficientais tenkina lygybes

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

ir

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Raskite didžiausią galimą sandaugos kn reikšmę.

3 užduotis. Realiųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{R}$. Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{su bet kuriais } x, y \in \mathbb{R}.$$

4 užduotis. Visiems teigiamiems realiesiems skaičiams x, y, z įrodykite nelygybę:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

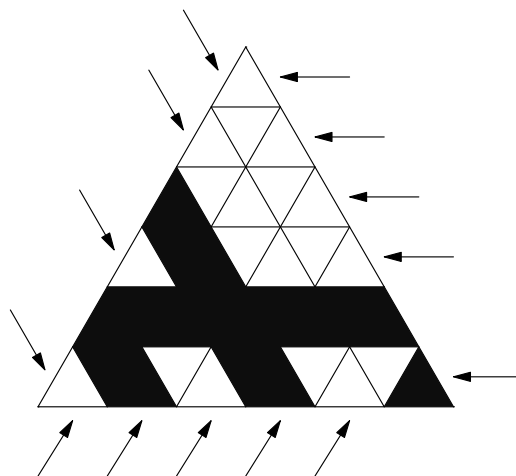
5 užduotis. Dviejose priešingose kubo viršūnėse įrašyti skaičiai 0 ir 2013. Realieji skaičiai turi būti įrašyti ir likusiose 6 viršūnėse. Tada kiekvienai kubo briaunai priskiriamas skaičių, esančių jos galuose, skirtumas. Kokie skaičiai turi būti įrašyti 6 viršūnėse, kad briaunoms priskirtų skaičių kvadratų suma būtų mažiausia?

6 užduotis. Kalėdų Senelio maiše yra mažiausiai n dovanų ir kiekvienas iš n vaikų turi gauti dovaną. Žinoma, kad i -ajam vaikui (čia $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) patinka $x_i > 0$ iš Senelio turimų dovanų. Be to, galioja nelygybė

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Įrodykite, kad Kalėdų Senelis gali kiekvienam vaikui duoti po jam patinkančią dovaną.

- 7 užduotis.** Lentoje užrašytas natūralusis skaičius. Žaidėjai A ir B žaidžia tokį žaidimą: vienu ėjimu pasirenkamas toks lentoje užrašyto skaičiaus n daliklis m , kad $1 < m < n$, ir skaičius n lentoje pakeičiamas skaičiumi $n - m$. Žaidėjas A pradeda žaidimą, ir tada žaidėjai atlieka ėjimus pakaitomis. Žaidėjas, negalintis padaryti ėjimo, pralaimi. Su kokiomis pradinio skaičiaus reikšmėmis žaidėjas B turi pergalės strategiją?
- 8 užduotis.** Kosminėje pirtyje yra n begalinių kambarių. Kambaryje vienu metu gali būti tik vyrai arba tik moterys. Vyrai, eidami į šią pirtį, sutinka būti viename kambaryje tik su tais vyrais, kurių nepažįsta, o moterys – tik su moterimis, kurias pažįsta (jei A pažįsta B , tai ir B pažįsta A). Raskite tokį didžiausią skaičių k , kad bet kurios k sutuoktinių porų gali vienu metu kaitintis šioje pirtyje (du vyrai pažįsta vienas kitą tada ir tik tada, kai jų žmonos pažįsta viena kitą).
- 9 užduotis.** Šalyje yra 2014 miestų, jokie trys iš jų nėra vienoje tiesėje. Du miestus jungia tiesioginis lėktuvo reisas tada ir tik tada, kai abiejose tiesės, einančios per juos, pusėse yra po 1006 miestus. Įrodykite, kad iš jokio miesto neįmanoma lėktuvu nusukti į kitą, kiekviename mieste pabuvojant po lygiai vieną kartą.
- 10 užduotis.** Atkarpos, lygiagrečios baltos taisyklingojo trikampio kraštinėms, dalija jį į n^2 lygių taisyklingojo trikampio formos langelių. *Langelų eilę* sudaro visi langeliai, esantys tarp dviejų gretimų lygiagrečių atkarpų (ją sudaro ir vienas kampinis langelis). Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti *langelų eilę*, kurioje yra bent vienas baltas langelis, ir nudažyti jos visus langelius juodai (paveikslėlyje 1 parodyta, kaip galėtų atrodyti trikampis po keturių ėjimų, kai $n = 6$; rodyklės žymi galimus tolimesnius ėjimus). Per kiek mažiausiai ir per kiek daugiausiai ėjimų įmanoma nudažyti visą trikampį?



1 pav.

- 11 užduotis.** Smailiojo trikampio ABC kraštinės tenkina nelygybę $AC > AB$. Taškas D yra taško A projekcija į atkarpą BC , o taškai E ir F yra atitinkamai taško D projekcijos į atkarpas AB ir

AC . Tiesės AD ir EF kertasi taške G . Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas ir tiesė AD kertasi taškuose A ir H . Įrodykite, kad

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

12 užduotis. Trapecijos $ABCD$ pagrindai yra AB ir CD . Apskritimas, apibrėžtas apie trikampį BCD , ir tiesė AD kertasi taške E , nesutampančiame su taškais A ir D . Įrodykite, kad tiesė BC liečia apskritimą, apibrėžtą apie trikampį ABE .

13 užduotis. Trikampės piramidės sienos yra statieji trikampiai. Trijų jos briaunų ilgai lygūs s . Raskite piramidės tūrį.

14 užduotis. Du to paties spindulio apskritimai α ir β kertasi dviejuose taškuose, vienas iš kurių yra taškas P . Pažymėti tokie taškai A ir B , kad AP ir BP yra atitinkamai apskritimų α ir β skersmenys. Trečias to paties spindulio apskritimas eina per tašką P , o apskritimus α ir β dar kartą kerta atitinkamai taškuose X ir Y .

Įrodykite, kad tiesės XY ir AB lygiagrečios.

15 užduotis. Plokštumoje duoti keturi apskritimai, turintys bendrą centrą. Jų spinduliai sudaro griežtai didėjančią aritmetinę progresiją. Kiekviename apskritime pažymėta po tašką. Įrodykite, kad tie taškai negali būti kvadrato viršūnėmis.

16 užduotis. Natūralųjų skaičių n vadinsime *žaviu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius k , kad $1 < k < n$ ir

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \dots + n.$$

Ar egzistuoja žavus skaičius N , tenkinantis nelygybes

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

17 užduotis. Duoti natūralieji skaičiai c ir $n > c$. Marytės mokytojas lentoje užrašė n natūraliųjų skaičių. Ar tiesa, kad su bet kuriomis skaičių n ir c reikšmėmis Marytė gali visada tam tikra tvarka pažymėti mokytojo skaičius raidėmis $a_1, \dots, a_n$ bei gauti ciklinę užrašytųjų skaičių skirtumų sandaugą $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$, lygstančią moduliui n arba skaičiui 0, arba skaičiui c ?

18 užduotis. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras (x, y) , kad $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

19 užduotis. Žinoma, kad a_0 yra natūralusis skaičius ir kad lygybė $a_n = 5a_{n-1} + 4$ galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n . Ar gali a_{54} dalytis iš 2013 su kokia nors skaičiaus a_0 reikšme?

20 užduotis. Raskite visus tokius daugianarius f su neneigiamais sveikaisiais koeficientais, kad bet kuriems pirminiam skaičiui p ir natūraliajam skaičiui n galioja lygybė $f(p^n) = q^m$ su tam tikrais pirminiu skaičiumi q ir natūraliuoju skaičiumi m .