Baltic Way
Riga 2013

Uzdevumi

2013. gada 9. novembris, Rīga, Latvija

--Latvian version--

Darba laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Izmantot drīkst tikai rakstīšanai un zīmēšanai paredzētos rīkus.

Uzdevums 1. Pieņemsim, ka n ir pozitīvs vesels skaitlis. Pieņemsim, ka no tabulas

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

izvēlas n skaitļus tā, lai nevieni divi izvēlētie skaitļi nebūtu vienā rindā vai vienā kolonnā. Noteikt, kāda ir lielākā iespējamā vērtība šo n skaitļu reizinājumam.

Uzdevums 2. Pieņemsim, ka k un n ir pozitīvi veseli skaitļi un $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir pa pāriem atšķirīgi veseli skaitļi. Polinomam P ar veseliem koeficientiem izpildās

$$P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_k) = 54$$

un

$$P(y_1) = P(y_2) = \ldots = P(y_n) = 2013.$$

Noteikt lielāko iespējamo vērtību reizinājumam kn.

Uzdevums 3. Ar $\mathbb{R}$ tiek apzīmēta visu reālo skaitļu kopa. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(xf(y)+y) + f(-f(x)) = f(yf(x)-y) + y \qquad \text{visiem } x, y \in \mathbb{R}.$$

Uzdevums 4. Pierādīt, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x, y, z izpildās šāda nevienādība:

$$\frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Uzdevums 5. Skaitļi 0 un 2013 ir ierakstīti divās pretējās kuba virsotnēs. Pārējās 6 kuba virsotnēs jāieraksta kaut kādi reāli skaitļi. Uz katras kuba šķautnes tiks uzrakstīta šīs šķautnes galapunktos esošo skaitļu starpība. Kādā gadījumā uz šķautnēm uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa būs vismazākā?

Uzdevums 6. Ziemassvētku vecītim ir vismaz n dāvanas, kas paredzētas n bērniem. Zināms, ka katram $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i-tais bērns uzskata $x_i > 0$ no tām par labām dāvanām. Pieņemsim, ka

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Pierādīt, ka Ziemassvētku vecītis var iedot katram bērnam pa dāvanai tā, ka katrs bērns saņem dāvanu, ko viņš uzskata par labu.

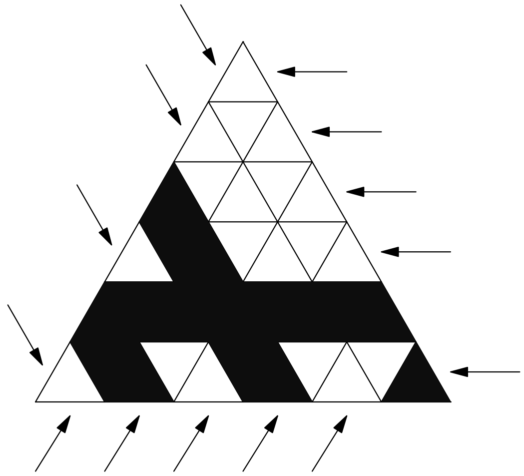
Uzdevums 7. Uz tāfeles uzrakstīts pozitīvs vesels skaitlis. A un B spēlē šādu spēli: katrā gājienā spēlētājs izvēlas uz tāfeles esošā skaitļa n dalītāju m un aizstāj n ar $n-m$. Spēlētāji gājienus izdara pārmaiņus, A izdara pirmo gājienu. Spēlētājs, kuram nav iespējama gājiena, zaudē spēli. Pie kādiem sākotnējiem skaitļiem spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija?

Uzdevums 8. Saunā ir n istabas, katrai no kurām ir neierobežota ietilpība. Nevienā istabā nevar vienlaikus būt vīrietis un sieviete. Vīrieši grib būt vienā istabā tikai ar vīriešiem, ar kuriem viņi nav savstarpēji pazīstami un sievietes - tikai ar sievietēm, ar kurām viņas ir pazīstamas. Noteikt lielāko k, kuram k laulāti pāri var vienlaikus apmeklēt saunu, ja zināms, ka divi vīrieši pazīst viens otru tad un tikai tad, ja viņu sievas pazīst viena otru.

Uzdevums 9. Valstī ir 2014 lidostas un nevienas trīs no tām nav uz vienas taisnes. Divas lidostas savieno tiešs reiss tad un tikai tad, ja taisne caur šīm divām lidostām sadala valsti divās daļās, katrā no kurām ir 1006 lidostas. Pierādīt, ka nav divu lidostu ar īpašību, ka no pirmās var aizlidot uz otru, apmeklējot katru no 2014 lidostām tieši vienreiz.

Uzdevums 10. Balts vienādmalu trijstūris ir sadalīts n^2 vienādos mazākos trijstūros, izmantojot taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Par *trijstūru rindu* nosauksim visu to trijstūru kopu, kas atrodas starp divām blakusesošām paralēlām taisnēm, kas veido trijstūru režģi. Viens stūrī esošs trijstūris arī tiek uzskatīts par trijstūru rindu.

Mēs gribam nokrāsot visus trijstūrus melnus ar šādu darbību virkni: izvēlamies trijstūru rindu, kas satur vismaz vienu baltu trijstūri un pārkrāsojam visus šīs rindas trijstūrus melnus (piemērs ar iespējamu situāciju pēc četriem gājieniem pie $n=6$ parādīts 1. attēlā; bultiņas parāda iespējamos variantus nākošajam gājienam). Atrast mazāko un lielāko iespējamo darbību skaitu, pēc kura visi trijstūri būs melni.



1. att.

Uzdevumi

2013. gada 9. novembris, Rīga, Latvija

--Latvian version--

Uzdevums 11. Dots šaurleņķa trijstūris ABC ar $AC > AB$. Ar D apzīmēsim A projekciju uz BC un ar E un F apzīmēsim D projekcijas uz AB un AC, attiecīgi. Ar G apzīmēsim taišņu AD un EF krustpunktu. Ar H apzīmēsim otru taisnes AD krustpunktu ar trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka

$$AG \cdot AH = AD^2 .$$

Uzdevums 12. Trapece $ABCD$ ar pamatiem AB un CD ir tāda, ka trijstūra BCD apvilktā riņķa līnija krusto taisni AD punktā E, kas atšķiras no A un D. Pierādīt, ka trijstūra ABE apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei BC.

Uzdevums 13. Visas tetraedra skaldnes ir taisnleņķa trijstūri. Ir zināms, ka trim no tetraedra malām ir vienāds garums s. Atrast tetraedra tilpumu.

Uzdevums 14. Riņķa līnijas α un β ar vienādu rādiusu krustojas divos punktos, viens no kuriem ir P. Ar A un B apzīmēsim, attiecīgi, punktam P diametriāli pretējos punktus uz riņķa līnijām α un β. Trešā riņķa līnija ar tādu pašu rādiusu iet caur P un krusto α un β attiecīgi punktos X un Y.

Pierādīt, ka taisnes XY un AB ir paralēlas.

Uzdevums 15. Četrām riņķa līnijām, kas atrodas vienā plaknē, ir viens un tas pats centrs. Riņķa līniju rādiusi veido stingri augošu aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka nav kvadrāta, kuram katra virsotne atrodas uz citas riņķa līnijas.

Uzdevums 16. Pozitīvu veselu skaitli n sauc par *skaistu*, ja eksistē vesels skaitlis k, $1 < k < n$, kuram

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \cdots + n.$$

Vai eksistē skaists skaitlis N, kuram izpildās

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4\ ?$$

Uzdevums 17. Pieņemsim, ka c un $n > c$ ir pozitīvi veseli skaitļi. Marijas skolotājs uzraksta uz tāfeles n pozitīvus veselus skaitļus. Vai ir taisnība, ka visiem n and c, Marija var apzīmēt skolotāja uzrakstītos skaitļus ar $a_1, \ldots, a_n$ tā, lai cikliskais reizinājums $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ būtu kongruents ar 0 vai ar c pēc moduļa n?

Uzdevums 18. Atrast visus veselu skaitļu pārus (x, y), kuriem $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Uzdevums 19. Pieņemsim, ka a_0 ir pozitīvs vesels skaitlis un $a_n = 5a_{n-1} + 4$, visiem $n \geq 1$. Vai var a_0 izvēlēties tā, lai a_{54} dalītos ar 2013?

Uzdevums 20. Atrast visus polinomus f ar nenegatīviem veseliem koeficientiem un īpašību, ka visiem pirmskaitļiem p un pozitīviem veseliem skaitļiem n eksistē pirmskaitlis q un pozitīvs vesels skaitlis m, kuriem izpildās $f(p^n) = q^m$.