

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.

Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.

Leyfileg hjálpargögn eru skrifæri og teikniverkfæri.

Dæmi 1. Látum n vera jákvæða heiltölu. Gerum ráð fyrir að n tölur séu valdar úr töflunni

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \dots & n^2-1 \end{array}$$

þannig að engar tvær þeirra séu úr sömu röð eða sama dálki. Finnið stærsta gildi sem margfeldi talnanna n getur gefið.

Dæmi 2. Látum k og n vera jákvæðar heiltölur og látum $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ vera ólíkar heiltölur. Margliða P með heiltölustuðla uppfyllir

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

og

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Ákvarðið stærsta gildi sem kn getur tekið.

Dæmi 3. Látum $\mathbb{R}$ vera mengi allra rauntalna. Finnið öll föll, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, þannig að

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{fyrir öll } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dæmi 4. Sannið að eftirfarandi ójafna gildi fyrir allar jákvæðar rauntölur x, y, z :

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Dæmi 5. Tölurnar 0 og 2013 eru ritaðar í gagnstæð horn tenings. Einhverjar rauntölur eru ritaðar í hin 6 hornin. Á hverja brún teningsins er mismunur gilda endapunktanna ritaður. Reiknum feringstölur fyrir allar tölurnar á brúnunum. Hvenær er summa feringstalnanna minnst?

Dæmi 6. Jólasveinninn er með a.m.k. n gjafir fyrir n börn. Barn númer i langar í $x_i > 0$ af gjöfunum, fyrir $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Gerum ráð fyrir að

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Sannið að jólasveinninn geti gefið sérhverju barni gjöf sem það langar í.

Dæmi 7. Jákvað heiltala er rituð á töflu. Keppendur A og B eru í keppni: sá sem á leik velur tölu m sem gengur upp í töluna n sem er á töflunni, þar sem $1 < m < n$. Því næst skrifar hann töluna $n - m$ á töfluna í staðinn fyrir n . Keppandi A byrjar og keppendurnir skiptast á að leika. Sá sem ekki getur leikið tapar. Fyrir hvaða upphafstölur er til örugg sigurleið fyrir keppanda B .

Dæmi 8. Í gufubaði eru n herbergi sem hvert fyrir sig getur tekið við ótakmörkuðum fjölda gesta. Á engum tímapunkti mega bæði karl og kona vera í sama herbergi. Ennfremur vilja karlarnir ekki vera í herbergi með kunningjum og konurnar vilja ekki vera í herbergi með ókunnugum. Finnið mesta fjölda hjóna, k , þannig að þau geti öll heimsótt gufubaðið á sama tíma. Gefið er að tveir karlmenn eru kunningjar þá og því aðeins að konur þeirra séu kunningjar.

Dæmi 9. Í landi nokkru eru 2014 flugvellar. Engir þrír þeirra liggja á sömu línu. Beint flug er milli tveggja flugvalla þá og því aðeins að línan milli þeirra skipti landinu í tvö svæði sem hvort fyrir sig inniheldur 1006 fluvelli. Sýnið að ekki eru til tveir flugvellar þannig að hægt sé að fljúga milli þeirra með viðkomu á öllum hinum fluvöllum nákvæmlega einu sinni.

Dæmi 10. Hvítum jafnhliða þríhyrningi er skipt upp í n^2 eins minni þríhyrninga með línunum sem liggja samsíða hliðum þríhyrningsins. Látum *þríhyrningalínu* vera alla þá þríhyrninga sem afmarkast af samliggjandi samsíða línunum sem mynda minni þríhyrningana. Jafnframt skilgreinum við þríhyrningana í hornunum sem þríhyrningalínur.

Við ætlum að mála alla þríhyrningana svarta með röð eftirfarandi aðgerða: við veljum þríhyrningalínu sem inniheldur a.m.k. einn hvítann þríhyrning og málum hana svarta (ein möguleg staða með $n = 6$ eftir fjórar aðgerðir er sýnda á Mynd 1; örvarnar sýna mögulegar næstu aðgerðir í þessarri stöðu). Finnið minnsta og stærsta mögulega fjölda aðgerða.

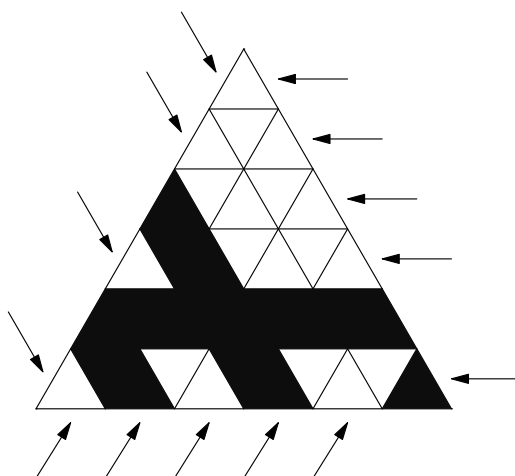


Figure 1

Dæmi 11. Í hvasshyrndum þríhyrningi ABC með $AC > AB$ látum við D vera ofanvarp A á BC , E ofanvarp D á AB og F ofanvarp D á AC . Látum G vera skurðpunkt línanna AD og EF . Látum

H vera hinn skurðpunkt línunnar AD við umritaða hring þríhyrningsins ABC . Sannið að

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

Dæmi 12. Trapisa $ABCD$ með samsíða hliðar AB og CD er þannig að umritaði hringur þríhyrningsins BCD sker línuna AD í punktinum E , sem er ólíkur A og D . Sannið að línan BC sé snertill umritaða hring þríhyrningsins ABE .

Dæmi 13. Hliðar fjórflötungs eru rétthyrndir þríhyrningar. Um fjórflötunginn gildir að þrjár brúnir hans hafa sömu lengd s . Finnið rúmmál fjórflötungsins.

Dæmi 14. Hringirnir α og β hafa sama radíus og skerast í tveimur punktum. Köllum annan þeirra P . Látum A vera gagnstæðan punkt við P á hringnum α og B vera gagnstæðan punkt við P á hringnum β . Þriðji hringurinn með sama radíus fer í gegnum P og sker α í punktinum X og β í punktinum Y .

Sýnið að línan XY sé samsíða línunni AB .

Dæmi 15. Fjórir sammiðja hringir liggja í sléttu. Geislar þeirra mynda strangt vaxandi jafnmunaröð. Sannið að ekki er til ferningur með hornpunkt á hverjum hring.

Dæmi 16. Við köllum jákvæða heiltölu n *indæla* ef til er heiltala k , $1 < k < n$, þannig að

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \dots + n.$$

Er til indæl tala N sem uppfyllir ójöfnurnar

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

Dæmi 17. Látum c og $n > c$ vera jákvæðar heiltölur. Kennari Maríu ritar n jákvæðar heiltölur á töflu. Getur María númerað tölurnar á töflunni með $a_1, \dots, a_n$ í þannig röð að margfeldið

$$(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$$

sé samleifa 0 eða c módúlus n , fyrir öll n og c .

Dæmi 18. Finnið allar tvenndir heiltalna (x, y) þannig að $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Dæmi 19. Látum a_0 vera jákvæða heiltölu og $a_n = 5a_{n-1} + 4$, fyrir öll $n \geq 1$. Er hægt að velja a_0 þannig að a_{54} sé margfeldi af 2013?

Dæmi 20. Finnið allar margliður f með ekki neikvæða heiltölustuðla þannig að fyrir allar frumtölur p og jákvæðar heiltölur n sé til framtala q og jákvæð heiltala m sem uppfyllir $f(p^n) = q^m$.