

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.

Während der ersten 30 Minuten können Anfragen an die Jury gestellt werden.

Schreib- und Zeichengeräte sind die einzigen erlaubten Hilfsmittel.

Aufgabe 1. Sei n eine positive ganze Zahl. Es werden n Zahlen aus der Tabelle

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

so gewählt, dass keine zwei von ihnen in derselben Zeile oder Spalte stehen. Man bestimme das maximale Produkt dieser n Zahlen.

Aufgabe 2. Es seien k und n positive ganze Zahlen und weiterhin seien $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ paarweise verschiedene ganze Zahlen. Ein Polynom P mit ganzzahligen Koeffizienten erfüllt

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

und

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Man bestimme den maximalen Wert von kn .

Aufgabe 3. Mit $\mathbb{R}$ werde die Menge der reellen Zahlen bezeichnet. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4. Man beweise die folgende Ungleichung für alle positiven reellen Zahlen x, y, z :

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Aufgabe 5. Die Zahlen 0 und 2013 werden auf zwei gegenüberliegende Ecken eines Würfels geschrieben. Auf die restlichen sechs Ecken werden weitere reelle Zahlen geschrieben. Auf jede Kante des Würfels kommt die Differenz der Zahlen der zugehörigen Eckpunkte. Für welche sechs Zahlen ist die Summe der Quadrate der Zahlen auf den Kanten minimal?

Aufgabe 6. Der Weihnachtsmann hat mindestens n Geschenke für n Kinder. Für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, wünscht sich das i -te Kind $x_i > 0$ dieser Geschenke. Es sei

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Man beweise, dass der Weihnachtsmann jedem Kind ein von ihm gewünschtes Geschenk geben kann.

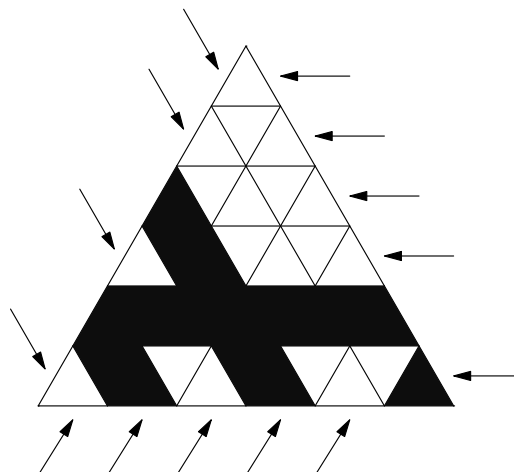
Aufgabe 7. Auf eine Tafel wird eine positive ganze Zahl geschrieben. Die Spieler A und B spielen das folgende Spiel: Bei jedem Zug wählt der aktive Spieler einen Teiler m der Zahl n auf der Tafel mit $1 < m < n$ und ersetzt dann n durch $n - m$. Der Spieler A beginnt, die Spieler ziehen abwechselnd. Wer keinen Zug mehr machen kann, hat verloren. Für welche Anfangszahlen hat Spieler B eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 8. In einer Sauna gibt es n Räume, jeweils mit unbegrenzter Anzahl von Plätzen. Kein Raum wird von Frauen und Männern gleichzeitig benutzt. Weiterhin wollen die Männer nur mit Männern in einem Raum zusammen sein, die sie nicht kennen, wohingegen die Frauen nur mit Frauen in einem Raum zusammen sein wollen, die sie kennen. Man bestimme die größte Anzahl k von Paaren, die gleichzeitig die Sauna besuchen können, wobei vorausgesetzt sei, dass sich zwei Männer genau dann kennen, wenn sich ihre Frauen auch kennen.

Aufgabe 9. In einem Land gibt es 2014 Flugplätze, wobei keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Zwei Flugplätze sind genau dann durch einen direkten Flug verbunden, wenn ihre Verbindungsgerade das Land so in zwei Teile zerlegt, dass auf jeder Seite 1006 Flugplätze liegen. Man beweise, dass es keine zwei Flugplätze derart gibt, dass man auf dem Weg zwischen ihnen alle 2014 Flugplätze genau einmal besucht.

Aufgabe 10. Ein weißes gleichseitiges Dreieck ist durch Parallelen zu den Dreiecksseiten in n^2 gleichgroße Dreiecke zerlegt. Ein *Dreiecksstreifen* bezeichne alle Dreiecke, die zwischen zwei benachbarten Parallelen des Netzes liegen. Insbesondere sollen die Eckdreiecke auch als Dreiecksstreifen betrachtet werden.

Wir wollen alle Dreiecke durch eine Folge von Operationen der folgenden Art schwarz färben: Wähle ein Dreiecksstreifen, in dem mindestens ein weißes Dreieck auftaucht, und färbe diesen Streifen schwarz. (Eine mögliche Situation mit $n = 6$ nach vier Operationen wird in der Abbildung dargestellt; die Pfeile zeigen mögliche Operationen im nächsten Schritt.) Man bestimme die kleinste und die größte mögliche Anzahl von Operationen.



Aufgabe 11. In einem spitzwinkligem Dreieck ABC mit $AC > AB$ seien D die Projektion von A auf BC und E bzw. F die Projektionen von D auf AB bzw. AC . Es sei G der Schnittpunkt der Geraden AD und EF , weiterhin sei H der zweite Schnittpunkt der Geraden AD mit dem Umkreis des Dreiecks ABC . Man beweise, dass

$$AG \cdot AH = AD^2$$

gilt.

Aufgabe 12. Ein Trapez $ABCD$, bei dem AB und CD parallele Seiten sind, hat die Eigenschaft, dass der Umkreis des Dreiecks BCD die Gerade AD im Punkt E schneidet, der verschieden von A und D ist. Man beweise, dass die Gerade BC eine Tangente des Umkreises des Dreiecks ABE ist.

Aufgabe 13. Alle Seitenflächen eines Tetraeders seien rechtwinklige Dreiecke. Drei der Kanten des Tetraeders mögen die gleiche Länge s aufweisen. Man bestimme das Volumen des Tetraeders.

Aufgabe 14. Die gleichgroßen Kreise α und β schneiden sich in P und einem anderen Punkt. Mit A bzw. B seien die Punkte bezeichnet, die zu P diametral auf α bzw. β liegen. Ein dritter Kreis mit gleichem Radius geht durch P und schneidet α und β in den Punkten X bzw. Y . Man beweise, dass die Gerade XY parallel zur Geraden AB ist.

Aufgabe 15. Vier Kreise in einer Ebene haben denselben Mittelpunkt; ihre Radien bilden eine streng monoton wachsende arithmetische Folge. Man beweise, dass es kein Quadrat gibt, bei dem jeder Eckpunkt auf einem anderen Kreis liegt.

Aufgabe 16. Wir nennen eine positive ganze Zahl n *angenehm*, wenn es eine ganze Zahl k , $1 < k < n$, gibt, so dass

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \dots + n$$

gilt.

Man entscheide, ob es eine angenehme Zahl N gibt, die folgende Ungleichungen erfüllen:

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4.$$

Aufgabe 17. Es seien c und $n > c$ positive ganze Zahlen. Maries Lehrer schreibt n positive ganze Zahlen an die Tafel. Man entscheide, ob Marie für alle n und c immer die angeschriebenen Zahlen so mit $a_1, \dots, a_n$ indizieren kann, dass das zyklische Produkt $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ entweder zu 0 oder zu c modulo n kongruent ist.

Aufgabe 18. Man bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen mit $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Aufgabe 19. Sei a_0 eine positive ganze Zahl, und für alle $n \geq 1$ sei $a_n = 5a_{n-1} + 4$. Kann man a_0 so wählen, dass a_{54} ein Vielfaches von 2013 ist?

Aufgabe 20. Man bestimme alle Polynome f mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten, so dass für alle Primzahlen p und alle positiven ganzen Zahlen n eine Primzahl q und eine positive ganze Zahl m mit $f(p^n) = q^m$ existieren.