

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Tohib kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Olgu n positiivne täisarv. Tabelist

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

tuleb valida n arvu nii, et ühestki reast ega veerust ei valita kaht arvu. Leia nende n arvu korrutise suurim väärtus.

Ülesanne 2. Olgu k ja n positiivsed täisarvud ning olgu $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ erinevad täisarvud. Täisarvuliste kordajatega polünoom P rahuldab tingimusi

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

ja

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Leia korrutise kn suurim väärtus.

Ülesanne 3. Olgu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral võrdus

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y$$

kehtib iga $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks.

Ülesanne 4. Tõesta, et järgnev võrratus kehtib kõigi positiivsete reaalarvude x, y ja z jaoks:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Ülesanne 5. Kuubi kahte vastastippu kirjutatakse arvud 0 ja 2013. Ülejäänud 6 tippu kirjutatakse ka mingid reaalarvud. Kuubi igale servale kirjutatakse selle serva otspunktides olevate arvude vahe. Leia kõik juhud, mille korral on servadele kirjutatud arvude ruutude summa minimaalne.

Ülesanne 6. Jõuluvanal on n lapse jaoks vähemalt n kinki. Iga $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral ihaldab i s laps täpselt $x_i > 0$ neist kinkidest. On teada, et

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Tõesta, et jõuluvana saab anda igale lapsele kingi, mida see laps ihaldab.

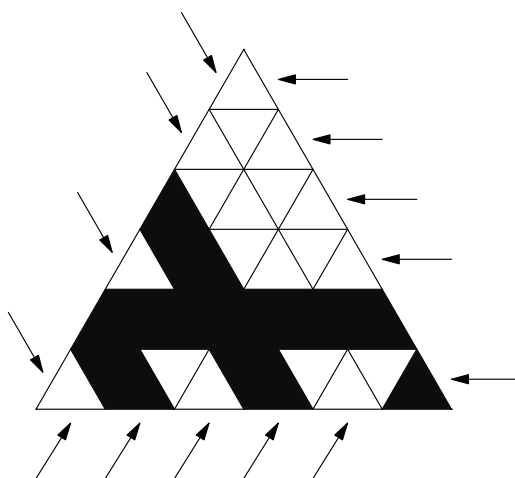
Ülesanne 7. Tahvlile on kirjutatud positiivne täisarv. Mängijad A ja B mängivad järgmist mängu. Igal käigul peab mängija valima tahvil oleva arvu n mingi jagaja m , mille korral $1 < m < n$, ja asendama arvu n arvuga $n - m$. Mängija A käib esimesena, käiakse kordamööda. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab. Milliste algsete arvude korral on võitev strateegija mängijal B ?

Ülesanne 8. Saunas on n ruumi, kõik piiramatu mahutavusega. Ühtki ruumi ei tohi kasutada naised ja mehed üheaegselt. Lisaks ei soovi mehed kasutada sama ruumi koos ühegi mehega, keda nad juba tunnevad, naised aga ei soovi kasutada sama ruumi koos ühegi naisega, keda nad ei tunne. Leia suurim arv k , mille korral saunas saavad samaaegselt viibida suvalised k abielupaari, eeldusel et enne sauna minekut tunnevad kaks meest teineteist parajasti siis, kui nende naised tunnevad teineteist.

Ülesanne 9. Riigis on 2014 lennujaama, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel. Kahe lennujaama vahel leidub otseliin parajasti siis, kui neid ühendav sirge jagab riigi kaheks osaks, millest kummassegi jääb 1006 lennujaama. Näita, et ei leidu kaht sellist lennujaama, kus ühest saab sõita teise, külastades kõiki 2014 lennujaama täpselt ühe korra.

Ülesanne 10. Valge võrdkülgne kolmnurk jaotatakse n^2 võrdseks väikseks kolmnurgaks kolmnurga külgedega paralleelsete sirgetega. Nimetame *kolmnurkade liiniks* kahe järjestikuse paralleelse jao-tussirge vahele jäävate kolmnurkade hulka. Erijuhuna loetakse üksik nurgas asuv kolmnurk samuti kolmnurkade liiniks.

Kõik kolmnurgad tuleb värvida mustaks järgmist tüüpi operatsioonidega: valida kolmnurkade liin, mis sisaldab vähemalt ühe valge kolmnurga, ja värvida see liin mustaks (üks võimalik olukord pärast nelja operatsiooni juhul $n = 6$ on näidatud joonisel 1; nooled näitavad võimalikke järgmisi operatsioone selles olukorras). Leia vähim ja suurim võimalik operatsioonide arv.



Joonis 1

Ülesanne 11. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kus $|AC| > |AB|$. Olgu D punkti A projektsioon küljele BC ning olgu E ja F punkti D projektsioonid vastavalt külgedele AB ja AC . Olgu G

sirgete AD ja EF lõikepunkt. Olgu H sirge AD teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega. Tõesta, et

$$|AG| \cdot |AH| = |AD|^2.$$

Ülesanne 12. Trapets $ABCD$ alustega AB ja CD on selline, et kolmnurga BCD ümberringjoon lõikub sirgega AD punktis E , mis erineb punktidest A ja D . Tõesta, et kolmnurga ABE ümberringjoon puutub sirget BC .

Ülesanne 13. Tetraeedri kõik tahud on täisnurksed kolmnurgad. On teada, et tetraeedri kolm serva on võrdse pikkusega s . Leia tetraeedri ruumala.

Ülesanne 14. Võrdse raadiusega ringjooned α ja β lõikuvad kahes punktis, millest üks olgu P . Punktid A ja B asugu vastavalt ringjoontel α ja β diametraalselt punkti P vastas. Sama raadiusega kolmas ringjoon läbigu punkti P ning lõikugu ringjoontega α ja β vastavalt punktides X ja Y .

Tõesta, et sirge XY on paralleelne sirgega AB .

Ülesanne 15. Tasandil asub neli ühise keskpunktiga ringjoont. Nende raadiused moodustavad rangelt kasvava aritmeetilise jada. Tõesta, et ei leidu sellist ruutu, mille iga tipp asuks erineval ringjoonel.

Ülesanne 16. Nimetame positiivset täisarvu n *vaimustavaks*, kui leidub täisarv k , $1 < k < n$, nii et

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \dots + n.$$

Kas leidub vaimustav arv N , mis rahuldab võrratust

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

Ülesanne 17. Olgu c ja $n > c$ positiivsed täisarvud. Mari õpetaja kirjutab tahvlile n positiivset täisarvu. Kas vastab tõele, et iga n ja c korral saab Mari alati õpetaja poolt kirjutatud arvud tähistada muutujatega $a_1, \dots, a_n$ mingis järjestuses, nii et tsüklilise korrutise

$$(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$$

väärtus oleks kongruentne arvuga 0 või c mooduli n järgi?

Ülesanne 18. Leia kõik sellised täisarvude paarid (x, y) , et $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Ülesanne 19. Olgu a_0 positiivne täisarv ja $a_n = 5a_{n-1} + 4$ iga $n \geq 1$ korral. Kas arvu a_0 saab valida nii, et a_{54} oleks arvu 2013 kordne?

Ülesanne 20. Leia kõik sellised mittenegatiivsete täisarvuliste kordajatega polünoomid f , et iga algarvu p ja positiivse täisarvu n korral leiduvad algarv q ja positiivne täisarv m nii, et $f(p^n) = q^m$.